

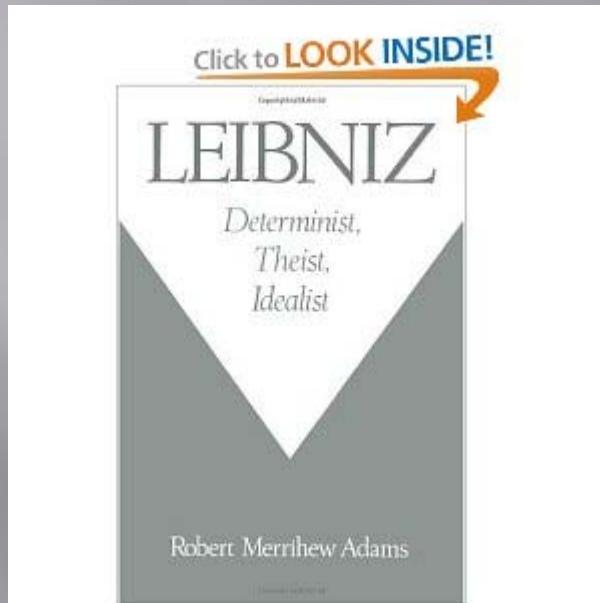
LEIBNIZ, MODAL LOGIC AND POSSIBLE WORLDS SEMANTICS



First Part : The Apuleian Square, Proclus's Bed of the Modal Metaphysics



Robert Merrihew
ADAMS : Leibniz, «
a sort of
grandfather of
possible worlds
semantics for
modal logic »

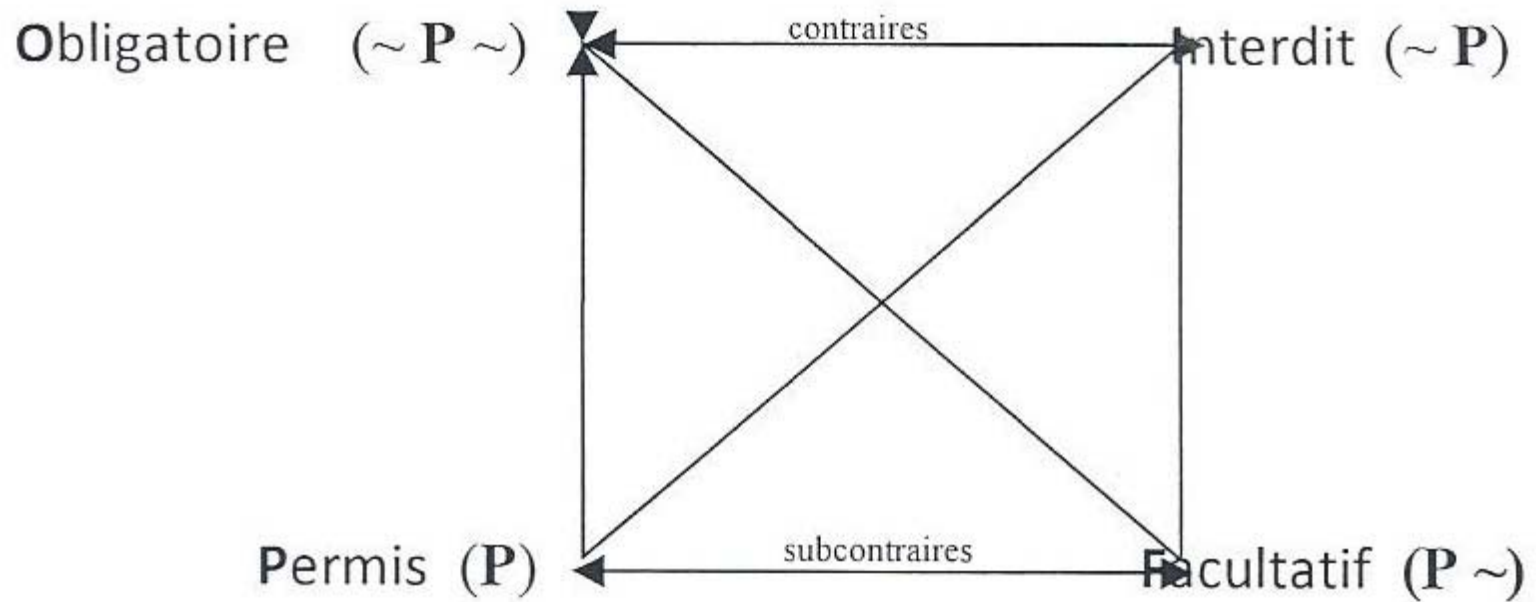


- Le carré d'Apulée, qui apparaît explicitement dans les premiers écrits juridiques, est-il un l'outil herméneutique adéquat pour suivre la constitution de la métaphysique modale leibnizienne ?
- Leibniz avait-il effectivement perçu la difficulté que l'axiome de distribution en logique modale suscitait à l'encontre de la solution au problème de la consistance d'une création contingente par un être nécessaire et dont s'étaient facilement accommodé des penseurs religieux tels Calvin ou Pascal ?
- Si la réponse est positive, on est alors tenté de déceler dans la reconnaissance de cette difficulté, le moteur pour aller chercher une autre solution, qui reconstitue la pensée modale, donc le carré apulien, autour d'une théorie de la preuve et de la démonstration.
- Avec la sémantique des mondes possibles, on quitte l'approche syntaxique, selon lequel toute proposition vraie est dérivable dans le système considéré, à une conception sémantique où la vérité d'une proposition devient relative à un modèle.

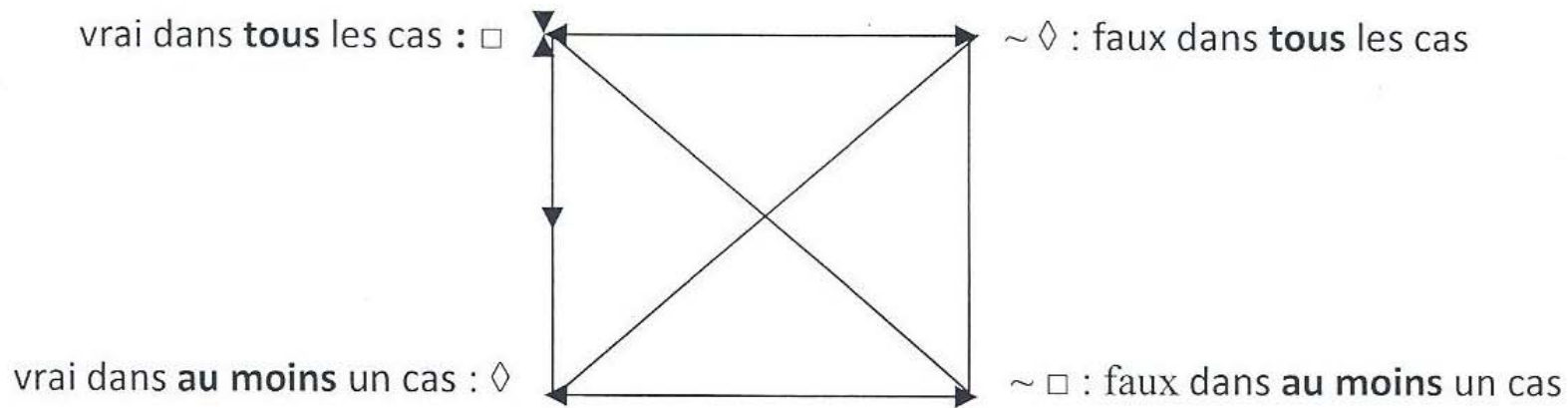
I – Is the Apuleian square compatible with Leibniz's Modal Metaphysics ?

MODALITÉS : déontiques	aléthiques	potest + négation	épistémiques
<i>Justum, Licitum</i> (permis)	possible	<i>potest fieri a quodam viro bono</i>	Ce qui est intelligible
<i>Injustum, Illicitum</i> (interdit)	impossible	<i>non potest fieri a nullo (seu non quodam) viro bono</i>	Ce qui n'est pas intelligible
<i>Aequum, Debitum</i> (obligatoire)	nécessaire	<i>non potest non fieri a (omni, seu non quodam non) viro bono</i>	Ce dont l'opposé n'est pas intelligible
<i>Indebitum, Omissibile</i>	contingent	<i>potest non fieri a (quodam non) viro bono</i>	Ce dont l'opposé est intelligible

Deontic square



Lenzen on Leibniz'deontic logic



Pour W. Lenzen, la sémantique des mondes possibles qui soutient l'interprétation du carré des *Elementa juris naturalis* repose sur les relations fondamentales suivantes⁸ :

$$\text{NEC 1 : } \square p \leftrightarrow \sim \square \sim p$$

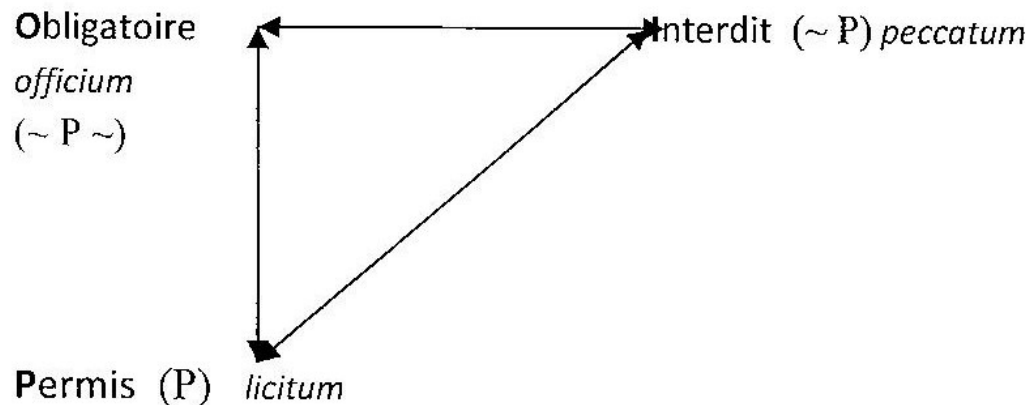
$$\text{NEC 3 : } \square p \rightarrow \diamond p$$

$$\text{NEC 2 : } \sim \diamond p \leftrightarrow \square \sim p$$

$$\text{NEC 4 : } \sim \diamond p \rightarrow \sim \square p$$

Kalinowski's triangle of contraries

On obtient alors ce que G. Kalinowski appelait le triangle des contraires, avec *licitum* en position de permis bilatéral : à la fois permission de faire / de ne pas faire¹⁰.

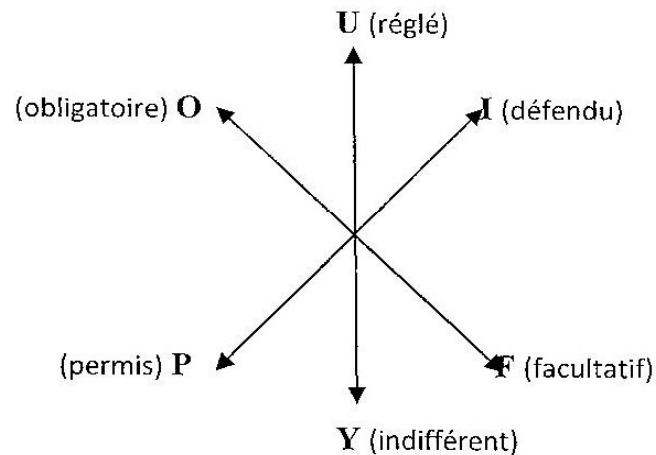


Les flèches expriment des relations de *contrariété*, sur la base desquelles qui s'écrivent comme de juste ces formules d'interdéfinissabilité :

Blanché's Star

$$[1] \mathbf{O} \equiv \sim (\mathbf{I} \vee \mathbf{P}) \quad [2] \mathbf{I} \equiv \sim (\mathbf{O} \vee \mathbf{P}) \quad [3] \mathbf{P} \equiv \sim (\mathbf{I} \vee \mathbf{O}).$$

Il suffit de dédoubler le permis pour que le triangle redevienne un carré : **P** étant ce qui est unilatéralement permis de faire, et **F** le facultatif unilatéral, ce qu'il est permis de ne pas faire. Symétriquement, la permission de faire devient subalterne à l'obligation, la permission de ne pas faire devenant la subalterne de l'interdiction.



En ajoutant **U**, l'obligatoire bilatéral (ordonné ou défendu) et en renouant avec le sens bilatéral du permis sous la forme de l'indifférent **Y**, on constitue une étoile à six rayons où les flèches supportent cette fois des relations de *contradiction*, où l'on reconnaît bien entendu, l'hexagone de Blanché quand on relie les sommets.

Une quatrième relation d'interdéfinissabilité achève la caractérisation des modalités déontiques : [4] $\mathbf{F} \equiv \sim (\mathbf{O} \vee \mathbf{I})$.

Y more useful than U

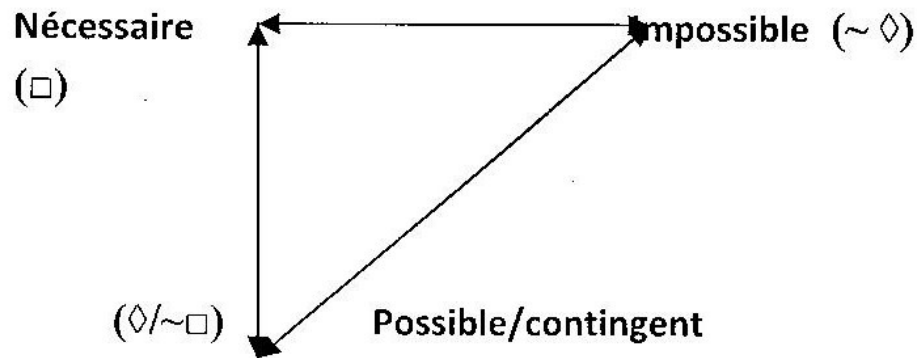
- ▣ Les juristes soulignent qu'il en va bien différemment à l'autre opposé de l'hexagone, où c'est au contraire le pôle unifiant Y qui l'emporte en pertinence par rapport aux subcontraires.
- ▣ En effet, il se trouve qu'une permission de faire, détachée de la permission de ne pas faire, revient à une obligation. Et réciproquement, une permission de ne pas faire, non accompagnée de la permission de faire, équivaut à une interdiction, soit en symboles :

$$((Pp \wedge \sim Fp) \rightarrow Op) \rightarrow (Pp \leftrightarrow Op) \text{ et } ((Fp \wedge \sim Pp) \rightarrow Ip) \rightarrow (Fp \leftrightarrow Ip).$$

- ▣ R. Blanché, *Structures...*, § 12.
- ▣ Cédric Goulier, *Norme permissive et droit public*, thèse de droit public, Université de Limoges, 2006, p. 45.

Degenerated square in modal metaphysics

Si on transposait le triangle déontique des contraires à la métaphysique modale, il s'ensuivrait une confusion entre les modalités du possible et du contingent.



Mais ne demeure-t-il pas essentiel, en régime de métaphysique modale, de conserver intact le carré d'Apulée ? En un sens oui, parce que le carré déploie le sommet inférieur du triangle, en un sens non, parce que la considération de l'existence introduit une dissymétrie entre le possible et le contingent.

II – Is the distributive axiom K compatible with Leibniz's Modal Metaphysics ?

- Boèce du chapitre 9 du *Peri hermeneias*, susceptible de recevoir trois interprétations.
- 1) la nécessité conditionnelle se confond avec la nécessité du conséquent :
 - « si p est le cas, alors il est nécessaire que q soit le cas » (ou : $p \supset \Box q$).
- 2) La seconde interprétation se réfère à une nécessité de la conséquence : « il est nécessaire que, si p est le cas, q soit le cas » (ou : $\Box (p \supset q)$).

La première interprétation revient à affirmer une nécessité brute, *de re*, alors même que la forme est hypothétique, tandis que la seconde, *de dicto*, offre une alternative au nécessitarisme.

- 3) Il y a aussi une troisième interprétation, où la nécessité, *de re* à nouveau, enveloppe cette fois une condition temporelle :
 - « si p a lieu pendant le temps t , il est nécessaire que p ait lieu pendant le temps t ».
- Elle fut envisagée par Aristote dans le *De interpretatione* (19^a 23) et il s'agit bien de celle avancée ensuite par Boèce dans la *Consolatio philosophiae* (V, vi, 27) J. Vuillemin, *op. cit.*, pp. 161-162.



Calvin

Calvin concédait qu'il ne fallait pas négliger, dans une optique pareillement compatibiliste,

« [...] les façons de parler qui ont été en usage aux escholes, touchant la nécessité absolue de celle qui vient d'une autre chose presupposée < *secundum quid* > »,

et il ajoutait dans le même sens :

« [...] item, du conséquent < *de consequentis* >, et de la conséquence < *de consequentiae* > ».

Exploitant toujours la logique médiévale des conséquences, il poursuivait, dans *l'Institution chrétienne* :

- ▣ « [...] c'est qu'il y a nécessité simple ou absolue, et nécessité selon quelque regard. Item, qu'il y a nécessité de ce qui s'ensuit et de la conséquence » (I, xvi, 9).

LEIBNIZ : *Confessio philosophi* (1673)

- ▣ « $p \supset q =_{\text{df.}} \sim \diamond (p \wedge \sim q)$ » = « $\square (p \supset q)$ ».
- ▣ *Confessio philosophi* (1673), le raisonnement nécessitariste :
« L'existence de Dieu est nécessaire ; de cette existence s'ensuivent les péchés compris dans la série [actuelle] des choses ; ce qui suit du nécessaire est nécessaire ; donc les péchés sont nécessaires ».
- ▣ *Confessio philosophi*, 1673, A VI, iii, 127 (trad. Belaval, p. 55).

The K axiom against the solution distinguishing *necessitas consequentis* and *consequentiae*

- Leibniz aurait pris conscience que la distinction entre nécessité du conséquent et nécessité de la conséquence, soit en formules, de $\Box (p \rightarrow q)$ et $(p \rightarrow \Box q)$, ne permettait pas de surmonter l'aporie nécessitariste.
- En effet, on ne peut nier que la combinaison de la nécessité hypothétique avec la nécessité de l'antécédent n'implique la nécessité du conséquent :
 - [1] $\Box p$
 - [2] $\Box (p \supset q)$
 - [1] \wedge [2] $\supset \Box q$.
- C'est ce que l'on retrouve ensuite en logique modale des propositions avec l'axiome de distribution **K**, à la base des systèmes modaux usuels :
- **K** : $\Box (p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$.

A Leibnizian equivalence of the K axiom

□ L'équivalent de l'axiome **K** s'énonce ainsi en latin :

« *Quicquid necessario incompatibile est, impossibile est* » (A VI, iii, 464).

Tout ce qui est incompatible avec ce qui est nécessaire est du même coup réputé impossible :

$$[1] \square p$$

$$[2] \sim (p \wedge q)$$

$$[1] \wedge [2] \supset \sim \diamond q$$

Pour que ce qui est donné comme équivalent dans le texte leibnizien d'A VI, iii, 464 à l'axiome **K**, il faut que sa contraposition soit : tout q compatible avec p qui est nécessaire, est nécessaire, et non pas « est possible », car alors, l'axiome **K** ne représenterait plus aucune menace pour la contingence du monde.

$$[1] \square p$$

$$[2] (p \wedge q)$$

$$[1] \wedge [2] \supset \square q$$

De mente, de universo, de Deo (1675)

« Impossible est une notion double : ce qui n'a pas d'essence, et ce qui n'a pas d'existence, soit ce qui ni ne fut, ni n'est ou ni ne sera parce qu'il est incompatible avec Dieu, c'est-à-dire avec l'existence ou la raison qui font que les choses sont plutôt qu'elles ne sont pas. Il faut examiner si on peut démontrer qu'il y a des essences qui manquent d'existence, afin qu'on ne dise pas que rien ne peut être conçu qui n'existera à un moment donné dans l'éternité entière. Toutes les choses qui sont, seront et ont été, constituent un tout. Tout ce qui est incompatible avec ce qui est nécessaire, est impossible ».

- ▣ « *Impossibilis duplex notio, id quod essentiam non habet, et id quod Existentiam non habet seu quod nec fuit nec erit, quod incompatible est deo, sive existentiae sive rationi quae facit ut res sint potius quam non sint. Videndum an demonstrari possit esse Essentias quae Existentia careant. Ne quis dicat nihil concipi posse quod non aliquando futurum sit in tota aeternitate. Omnia quae sunt erunt et fuerunt totum constituunt. Quicquid necessario incompatible est, impossibile est* » (A, VI, iii, 463-464).

De libertate et necessitate (1680-1684)

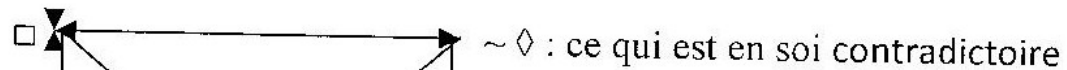
« Parce que nous définissons qu'est possible de sa nature ce qui n'implique pas en soi de contradiction, *même si la coexistence de celle-ci avec Dieu d'une certaine manière implique une contradiction.* Mais il faudra avoir recours à des significations de termes stables afin d'éviter toute espèce de locution dénuée de sens ».

- ▣ « Quia sua natura possibile definivimus, quod in se non implicat [contradictionem, *etsi ejus coexistentia cum Deo aliquo modo dici possit implicare contradictionem.* Sed opus erit constantes adhibere vocabulorum significationes ut species omnis absurdae locutionis evitetur. » (A VI, 4, 1447).
- ▣ Ce texte apparaissait dans Grua, t. I, p. 289, mais il omettait la partie de la phrase soulignée ici, capitale pour notre propos, qui est rétablie dans l'édition académique (ainsi que dans sa traduction en anglais par R. Ariew et D. Garber : *G. W. Leibniz. Philosophical Essays*, Hackett Publishing Company, Indianapolis, 1989, p. 21).

III- Le carré des modalités du point de vue d'une théorie de la démonstration

C'est la non contradiction qui ramène à la synonymie : être vrai, être une *res* ou un *ens*, être verbalement. Leibniz serait alors en mesure d'avancer un nouveau carré modal.

Ce dont l'opposé est
contradictoire :



Ce qui est en soi non
contradictoire :



Leibniz voulait construire un calcul logique sous la forme d'une algèbre des concepts où un terme exprime soit un concept soit une proposition. Le carré doit alors se lire sur deux plans : celui des termes complexes et celui des termes incomplexes soit des propositions.

Notion of demonstration

- Ainsi en va-t-il dans le cas spécial d'une proposition réduplicative (avec « en tant que... », « dans la mesure où... ») quand est précisé l'aspect particulier sous lequel la valeur d'un sujet doit être comprise.
-
- « Démontrer, en effet, n'est autre que montrer une certaine équation ou coïncidence du prédicat avec le sujet dans une proposition réciproque, résolvant les termes de la proposition, et substituant, au défini, la définition ou une partie de celle-ci ».
-
- On parvient à démontrer la vérité de l'universelle affirmative $A = AB$ si l'analyse de A et de B révèle les mêmes composants. Dans ce cas, $A = CDFG$ et $B = CDFG$.
-
- La substitution explicite une coïncidence parfaite, vu la loi d'idempotence $A = AA$:
- $A = ACGDF = AA = A$
- Mais la coïncidence peut être aussi seulement partielle, ainsi si $B = CDF$. On aura cependant bien démontré l'inclusion du prédicat dans le sujet.

Modalities in Propositions

- 1) Une proposition est dite *nécessaire* lorsque la résolution à l'identique des concepts du sujet et du prédicat s'effectue moyennant un nombre *fini* d'étapes pour conclure à la coïncidence des valeurs *salva veritate*.
- 2) Si on démontre qu'une proposition implique une contradiction (soit si on montre que A contient $\langle B \text{ non-}B \rangle$), cette proposition est qualifiée d'*impossible*.
- 3) Une proposition est *possible* quand on peut démontrer qu'elle n'implique pas en soi de contradiction.
- 4) Une proposition est *contingente* quand on ne peut démontrer que ni elle ni sa négation implique une contradiction ; il n'est jamais envisageable, en effet, de la ramener à des expressions identiques (G. I., § 56), pas plus que son opposée, vue la longueur infinie de l'analyse.

§ 61 in *Generales inquisitiones de Veritate et de Analysis Notionum* (1686) :

-
- « Est possible ce dont on peut montrer que la résolution ne rencontrera jamais de contradiction. Est contingent et vrai ce dont la résolution exige d'être continuée à l'infini. Est contingent et faux au contraire ce dont on ne peut démontrer la fausseté si ce n'est par le fait qu'on ne peut en démontrer la vérité. Il semble douteux qu'il suffise, pour démontrer une vérité, d'être certain qu'on ne rencontrera jamais de contradiction au cours de sa résolution. Car cela a pour conséquence que tout ce qui est possible est vrai ».
-

Proof and Demonstration

- ▣ Sleight met en avant un brouillon non publié (L Br. 68-68v) d'une lettre à Arnauld du 14 juillet 1686, très clair sur ce point :

« Les vérités contingentes n'ont pas de démonstrations, à proprement parler, mais elles doivent avoir des preuves *a priori* ».

Quand il se référait à la notion de preuve, Leibniz oscillait entre trois sens possibles :

- 1) la réduction aux identiques c'est-à-dire une démonstration ;
- 2) des séquences d'identités infinies où la coïncidence est approchée comme une limite ;
- 3) des méta-preuves.

Metaproof of a proposition :

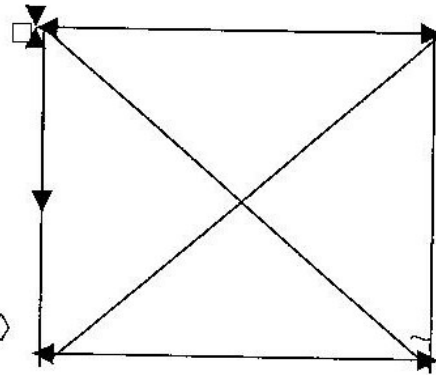
- ▣ Une proposition identique a comme prédicat un sous-ensemble du sujet. Aujourd'hui on entendrait par « méta-preuve » d'une proposition p :
 - 1) soit la preuve qu'il existe une séquence S de paires ordonnées avec comme premier terme p et comme second terme un terme identique en tout avec p si ce n'est l'exception d'un concept remplacé par un ensemble qui en constitue une analyse pas à pas ;
 - 2) soit la preuve qu'il existe une séquence S' infinie. La perspective d'obtenir une preuve concerne non la proposition elle-même, mais le processus de démonstration thématiqué en objet prouvable.

Generales Inquisitiones..., § 136

136) On rencontre pourtant ici une difficulté. Nous pouvons démontrer qu'une ligne, à savoir une asymptote, se rapproche sans cesse d'une autre et que deux quantités sont égales entre elles, en montrant, même dans le cas des asymptotes, ce qui se produit quand le développement est poursuivi aussi longtemps qu'on voudra. Donc les hommes auront également accès à la certitude à propos des vérités contingentes. Mais il faut répondre qu'il existe en effet une similitude mais non une concordance entière. Et il peut exister des rapports qui ne se découvrent jamais autant qu'il est besoin pour la certitude aussi loin que l'on poursuive leur résolution (C 389) et qui ne sont parfaitement compris que par celui dont l'intellect est infini. Il est vrai que, comme pour les asymptotes et les nombres incommensurables, nous pouvons avoir beaucoup de connaissances certaines à propos des vérités contingentes, sur la base du principe selon lequel toute vérité doit pouvoir être prouvée et que par suite si, dans les hypothèses, tous les termes se comportent de la même manière de part et d'autre, il ne peut y avoir de différence dans les conclusions⁹⁵. Et il existe d'autres vérités de ce genre qui valent aussi bien dans l'ordre du nécessaire que dans celui du contingent dans la mesure où elles sont réflexives. Pourtant nous ne pouvons pas plus rendre pleinement raison des propositions contingentes que prolonger perpétuellement des asymptotes et parcourir de bout en bout des progressions numériques infinies.

Towards a Possible World Semantics

Vrai dans tout
monde possible :



$\sim \diamond$: faux dans tout monde possible

Vrai dans au moins
un monde possible :



\square : faux dans au moins un monde possible

